НСОМ, Велико Търново, 13 май 2006

Група В

<u>Задача 1:</u> Дадена е матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Да се намери A^{2006}.

<u>Решение:</u> Непосредствено проверяваме, че $A^4 = E$, където E е единичната матрица от ред 3. Тогава

$$A^{2006} = A^{2004}A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Задача 2:</u> За кои стойности на реалния параметър a уравнението

$$\begin{vmatrix} e^{-x} & x & 1 & 1 \\ 1 & a & e^{-x} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

има точно два различни реални корена ?

<u>Решение:</u> Умножаваме третия ред на детерминантата по (-1) и го прибавяме към четвъртия. Развиваме детерминантата по елементите на четвъртия ред

$$(1-x)\begin{vmatrix} e^{-x} & x & 1 \\ 1 & a & e^{-x} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Получената детерминанта от трети ред развиваме, например, по правилото на Сарус и получаваме уравнението

$$(1-x)[ae^{-x}+xe^{-x}+1-a-x-e^{-2x}]=0,$$

откъдето

$$(1-x)(e^{-x}-1)(a+x-e^{-x}-1)=0.$$

$x=0$ и $x=1$ са корени на последното уравнение. Тогава уравнението $f(x)=a+x-e^{-x}-1=0$ следва да няма корени или да има за корени само 0 и 1. Производната $f'(x)=1+e^{-x}>0$ за $\forall x \Rightarrow f(x)$ е растяща за $\forall x$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, следователно уравнението $f(x)=0$ има точно един корен x_0.

1) $x_0=0 \Rightarrow a+0-1-1=0 \Rightarrow a=2$;

2) $x_0=1 \Rightarrow a+1-\frac{1}{e}-1=0 \Rightarrow a=\frac{1}{e}$.

Отг.: $a=2, a=\frac{1}{e}$.

Задача 3: В квадрат $\mathbb{K}_i$ с върхове A_i, B_i, C_i и D_i е вписан квадрат $\mathbb{K}_{i+1}$ с върхове $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}$ и D_{i+1}, $i=1,2,\dots$, така че $A_{i+1}\in A_iB_i$, $B_{i+1}\in B_iC_i$, $C_{i+1}\in C_iD_i$, $D_{i+1}\in D_iA_i$ и $A_iA_{i+1}=\lambda A_{i+1}B_i, \lambda\geq 0$.

Докажете, че ако за някои естествени числа $i\neq j$ страните на $\mathbb{K}_i$ и $\mathbb{K}_j$ са успоредни, то числото $\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\lambda$ е рационално.

Решение: Ъгълът α между страните A_iB_i и $A_{i+1}B_{i+1}$ на всеки два последователни квадрата е постоянен и $\operatorname{tg}\alpha=\lambda$. Т.к. K_i е хомотетичен на K_j, то $\alpha=n\alpha+k\pi \Rightarrow \alpha=\frac{k\pi}{1-n}$. Така получаваме

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\lambda=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{k\pi}{1-n}=\frac{k}{1-n}\in\mathbb{Q}.$$